**Quesito 1**

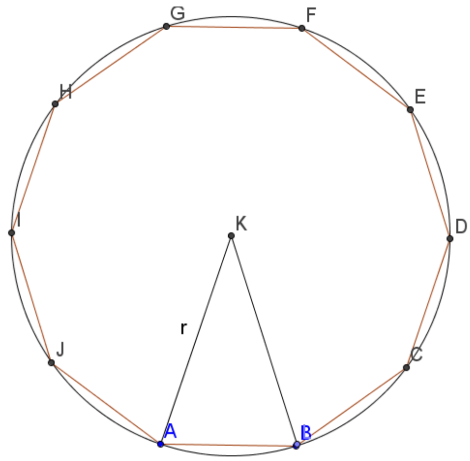
**Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.**

Il principio di Cavalieri afferma che dall'equivalenza delle sezioni è possibile dedurre l'equivalenza dei volumi. La proposizione da esaminare esprime l'inverso del principio di Cavalieri ed è quindi falsa.

Per avvalorare questa tesi è sufficiente mostrare un controesempio: si considerino un parallelepipedo a base quadrata di spigolo di base L e altezza h, che ha volume è $L^2h$ e una piramide a base quadrata di spigolo di base $\sqrt{3}L$ e stessa altezza h, che ha lo stesso volume; le sezioni parallele alle basi dei due solidi sono tuttavia non equivalenti.

**Quesito 2**

**Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è la sezione aurea del raggio, si provi che** $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$**.**




La sezione aurea di un segmento di lunghezza r è la parte x di r tale che $\frac{r}{x}=\frac{x}{r-x}$. Dalla definizione si ricava x = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. Quindi il lato AB del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio r (v. figura) è dato da: $\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$.

Indicato con K il centro del cerchio, l'angolo AKB ha ampiezza $A\hat{K}B=\frac{\pi}{5}$. Per il teorema della corda e le proprietà degli angoli alla circonferenza, si ha: $\overline{AB}=2\,r\,\text{sen}\left(\frac{A\hat{K}B}{2}\right)=2\,r\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Uguagliando le due espressioni di $\overline{AB}$ si dimostra la tesi.

**Quesito 3**
**Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?**
Indicando con x > 0 il raggio di base della casseruola e con h la sua altezza, si ha: $S = \pi x^2 + 2\pi xh$, da cui si ricava: $h = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x}$.

Il volume del cilindro è dato da $V(x) = \pi x^2 h = \frac{x\left(S - \pi x^2\right)}{2}$.

Il volume massimo può essere trovato con il calcolo differenziale.

La derivata della funzione V(x) è $V'(x) = \frac{S - 3\pi x^2}{2}$; dall'analisi del segno della derivata si deduce che il volume è massimo per $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

Il cilindro di volume massimo ha dunque raggio di base $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ e altezza h uguale a r; il volume massimo è $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

**Quesito 4**
**Si esponga la regola del marchese di De L'Hospital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$.**
Ponendo $f(x) = x^{2800}$ e $g(x) = 2^x$, si osserva che le funzioni f(x) e g(x) sono continue e derivabili in R e $g'(x) \neq 0$. Si può quindi applicare il teorema di De Hospital al limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Dopo 2008 applicazioni successive del teorema, le cui ipotesi continuano ad essere verificate, si arriva al limite immediato $\lim_{x\to+\infty} \frac{2008!}{(\ln(2))^{2008}\, 2^x} = 0$.

**Quesito 5**
**Si determini un polinomio P(x) di terzo grado tale che:**

$$\mathbf{P(0) = P'(0) = 0,\ P(1) = 0\ e}\ \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

Se P(x) è un polinomio di terzo grado, allora P(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a \neq 0$.
Quindi:
$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
e

$$\int_0^1 P(x)dx = \left| a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx \right|_0^1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d.$$

I requisiti P(0) = 0 e P(1) = 0 corrispondono rispettivamente alle condizioni:
d = 0
a + b + c + d = 0.
Per determinare P(x) occorre quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{1}{12} \end{cases}.$$

Il sistema è determinato e ha le soluzioni: a = -1, b = 1, c = d = 0, quindi il polinomio richiesto è P(x) = $-x^3 + x^2$.

**Quesito 6**
**Se** $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ **con n > 3 sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?**

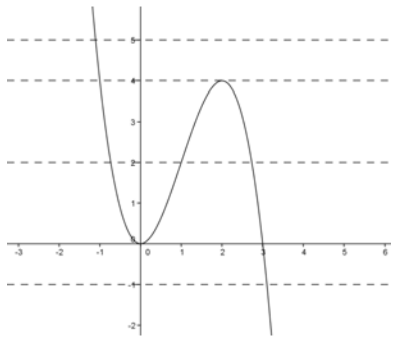
Dalle formule dei coefficienti binomiali si ricava $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!}$; $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$; $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$. Per avere una progressione aritmetica la differenza tra due elementi consecutivi deve essere costante cioè $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \frac{n^2-3n}{2}$ = $\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = \frac{n^3-6n^2+5n}{6}$,quindi $\frac{n^2-3n}{2} = \frac{n^3-6n^2+5n}{6}$ da cui si ricava la equazione di terzo grado $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$ che ha per soluzioni n=0; n=2 e n=7, ma la soluzione richiesta per n>3 è n=7.

**Quesito 7**

**Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - 3x^2 + k = 0$.**

Le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 + k = 0$ si ottengono discutendo graficamente il sistema

$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = k \end{cases}$, che rappresenta una cubica e un fascio di rette parallele all'asse x.



Dal grafico si deduce l'esistenza di una soluzione per k<0 e k>4, una soluzione semplice e una soluzione doppia per k=0 e k=4 e tre soluzioni distinte per 0<k<4.

**Quesito 8**

**Sia f la funzione definita da f(x) = $\pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno della sua derivata, prima e seconda, nel punto x = π.**

Data la funzione f(x)= $\pi^x - x^\pi$ , il dominio è x>0 .Si determinano la derivata prima f'(x)= $\pi^x \ln \pi - \pi x^{\pi-1}$ e la derivata seconda f"(x)= $\pi^x 2 \ln \pi - \pi(\pi - 1)x^{\pi-2}$ . Per cui f'(□) = $\pi^\pi (\ln \pi - 1)$ e f"(□) = $\pi^\pi (\ln^2 \pi - 1 + \frac{1}{\pi})$ che sono entrambe positive.

**Quesito 9**

**Sia f(x) = $\frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ ; esiste $\lim_{x \to 1} f(x)$ ? Si giustifichi la risposta.**

Si devono calcolare separatamente i limiti destro e sinistro:

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = 2$ e $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = -2$. Essendo i due valori diversi il limite richiesto non esiste.

**Quesito 10**

**Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo.**
**La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è il 10%.**
**Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Qual è la percentuale da riportare sul segnale?**

Si considera un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa è 1200 m e un cateto è 85 m.

sin(α) = $\frac{85}{1200} = 0{,}0708333$ da cui si ricava α = 4° 3' 43".

La percentuale p da riportare sul segnale è ricavabile dalla proporzione $\frac{85}{1200} = \frac{p}{100}$ e quindi p = 7%.