

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003**

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D .

- a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T , trovare una relazione che leghi V, S ed r .
- b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T' .
- c) Condotto il piano α , contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E , e posto che uno spigolo di T sia lungo s , calcolare la distanza di E dalla retta AB .
- d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p .
- e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$.

■ **PROBLEMA 2**

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

- a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
- b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.
- c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

■ **QUESTIONARIO**

- 1 Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z , due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3 Dal punto A , al quale è possibile accedere, è visibile il punto B , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB . Dal punto A si può però accedere al punto P , dal quale, oltre ad A , è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB , è tuttavia possibile misurare la distanza AP . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB .

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

- A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5 La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6 La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7 Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

- A) $\frac{1}{4} n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3} n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

8 x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

- A) è divisibile per 2 e per 3.
B) è divisibile per 2 ma non per 3.
C) è divisibile per 3 ma non per 2.
D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9 Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinque che contengono i numeri 1 e 90.

10 Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore

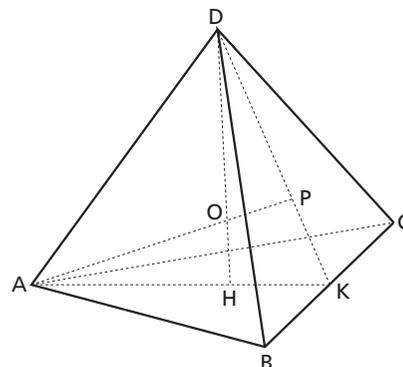
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

PROBLEMA 1

a) Detto s lo spigolo del tetraedro T , si ha che AK e DK sono le altezze di due facce di T (figura 1) e misurano $s \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le altezze AK e DK sono anche bisettrici e mediane. L'altezza DH cade nel baricentro del triangolo ABC , quindi $\overline{HK} = \frac{1}{3} \overline{AK} = s \frac{\sqrt{3}}{6}$. L'altezza DH si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo DHK (figura 2): risulta $\overline{DH} = s \sqrt{\frac{2}{3}}$.



► Figura 1.

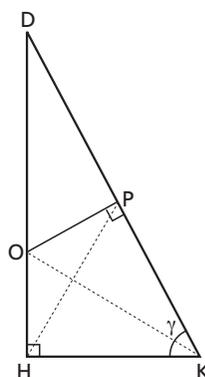
Le altezze del tetraedro si incontrano nel punto O , centro della sfera inscritta in T , che ha raggio $OH = OP = r$.

I triangoli rettangoli KOH e KOP sono congruenti, allora KO è la bisettrice di $\widehat{HKP} = \gamma$. Considerando il triangolo OHK , si può scrivere: $r = \overline{HK} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, ma $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{DH}}{\overline{HK}} = 2\sqrt{2}$, da cui, attraverso le formule di bisezione si giunge a:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ In definitiva risulta: } r = \frac{s}{2\sqrt{6}}.$$

La superficie del tetraedro è: $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s \right) = s^2 \sqrt{3} = r^2 \cdot 24\sqrt{3}$.

Il volume risulta: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \cdot s \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = r^3 \cdot 8\sqrt{3}$, da cui segue: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$.



▲ Figura 2.

b) HP è uno spigolo del tetraedro T' , con riferimento al triangolo HPK , nel quale si nota che

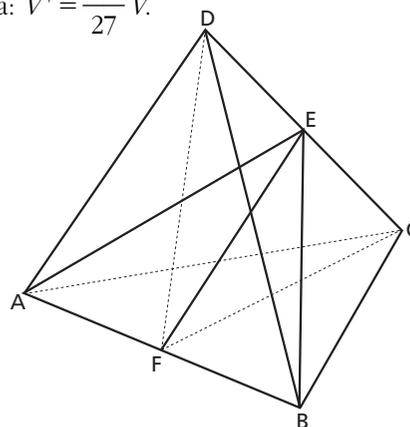
$\widehat{KHP} = \widehat{KPH} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, si ha: $\frac{\overline{HP}}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\overline{HK}}{\operatorname{cos} \frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \overline{HP} = 2 \cdot \overline{HK} \cdot \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}$. Dal valore di $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ si ricava

$\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Allora $s' = \overline{HP} = 2 \cdot s \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3}$, da cui si ha: $V' = \frac{1}{27} V$.

c) Con riferimento alla figura 3, detto F il punto medio di AB , allora DF e CF sono le mediane delle facce ADB e ACB rispettivamente, il triangolo DFC è quindi isoscele e l'altezza EF è anche mediana: il piano α interseca CD nel punto medio E . AE è la mediana della faccia CAD , BE è la mediana della faccia CBD , quindi ABE è isoscele e la mediana EF è anche altezza. Dal teorema di Pitagora per AEF :

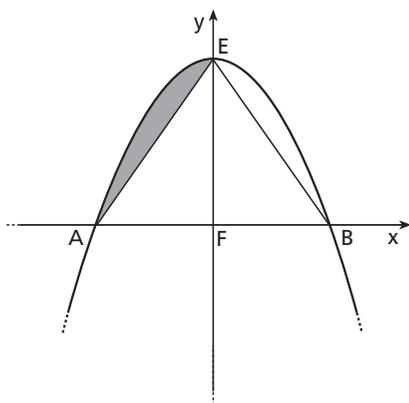
$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{\left(s \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2} = s \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

► Figura 3.



d) Scelto il sistema di riferimento con origine nel punto F , asse delle ascisse coincidente con la retta orientata AB , asse delle ordinate coincidente con la retta orientata FE (figura 4), si scrive l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, passante per i punti $A\left(-\frac{s}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$, $E\left(0; s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{Risulta: } \begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{s}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + c \\ s\frac{\sqrt{2}}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b = 0 \\ c = s\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



◀ Figura 4.

e) L'area del segmento parabolico ABE è $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$, l'area del triangolo ABE risulta $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$.

L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è quindi: $A = \frac{1}{2} \cdot (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \frac{s^2\sqrt{2}}{24}$, che risulta pari a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm² quando $s = 2\sqrt{2}$ cm.

PROBLEMA 2

a) La funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2m}, & \text{per } m > 0 \\ \frac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \text{per } m > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}.$$

b) Per $m \leq 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -4 \neq 0$.

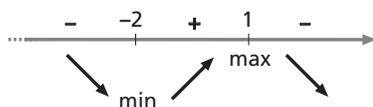
Per $m > 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2} = 0 \Rightarrow m = 1$.

c) La funzione da studiare è: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto \mathbb{R} . Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y = 0$.

La derivata prima risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$,

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1; 1)$.

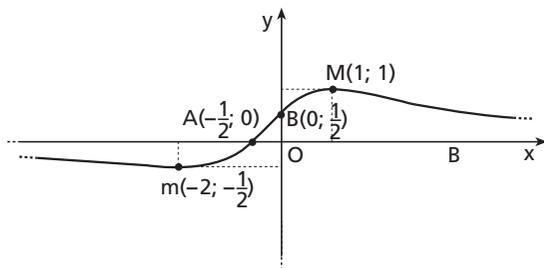


◀ Figura 5.

Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x+1)(x^2+2) - 2(x^2+x-2) \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3},$$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre. In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).



◀ Figura 6.

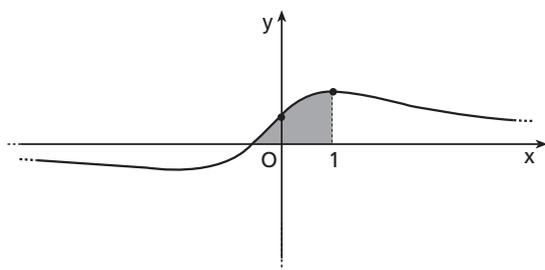
d) L'area richiesta (figura 7) si ottiene dall'integrale:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+2} dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx,$$

ma $d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$, allora

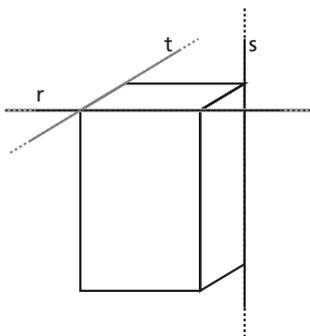
$$A = \left[\ln(x^2+2) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0,963193.$$



◀ Figura 7.

■ QUESTIONARIO

1 Due rette si dicono *sghembe* se non giacciono su uno stesso piano. La proposizione è falsa. Considerando infatti le rette r , s , e t su cui giacciono gli spigoli di un parallelepipedo (figura 8), si verifica facilmente che r e s sono sghembe, s e t sono sghembe, ma r e t non lo sono, in quanto incidenti in un vertice del parallelepipedo.



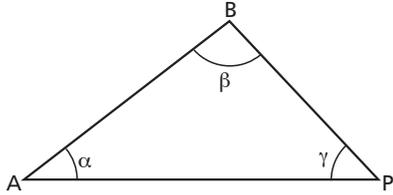
◀ Figura 8.

2 In generale si ottiene un quadrilatero sezione convesso, con i seguenti casi particolari:

- a) se il piano è parallelo alla base, il quadrilatero sezione è un quadrato;
- b) se il piano è parallelo ad un lato del quadrato di base, il quadrilatero sezione ha due lati paralleli e due no, si ottiene un trapezio isoscele;
- c) se il piano è parallelo ad una diagonale del quadrato di base, si ottiene un romboide.

3 Con riferimento alla figura 9 si misura direttamente la distanza AP , quindi si misurano con un goniometro gli angoli α e γ , posti nei vertici A e P ai quali è possibile accedere e dai quali è visibile anche B . Si ricava indirettamente l'angolo β posto nel vertice B : $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

Per il teorema dei seni: $\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AP}{\sin \beta} \Rightarrow AB = \frac{AP \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$.



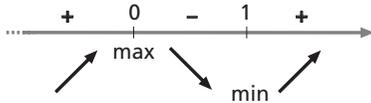
◀ Figura 9.

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - (x-1))$ si ottiene ponendo l'argomento del logaritmo maggiore di zero, quindi $\sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > (x-1)$. La disequazione è verificata per:

$$\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

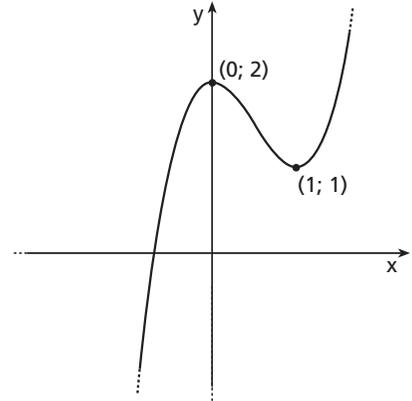
quindi le soluzioni sono: $-1 \leq x < 1 \cup 1 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$, ovvero la risposta B è esatta.

5 La funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ è una cubica, quindi ha al più tre intersezioni con l'asse delle ascisse. La derivata prima risulta: $f'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0$ per $x \leq 0$ e $x \geq 1$. Lo schema di figura 10 mostra che per $x=0$ si ha un massimo e per $x=1$ si ha un minimo.



◀ Figura 10.

Risulta poi $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$, quindi le coordinate dei punti di massimo e di minimo sono, rispettivamente: $M(0; 2)$ e $m(1; 1)$. Considerato che la funzione è continua in tutto \mathbb{R} e che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, se ne deduce che la funzione interseca l'asse delle x in un solo punto, di ascissa negativa, come risulta anche dal grafico di figura 11.



► Figura 11.

6 Posto $g(x) = x^2$ la funzione $f(x)$ è una funzione composta e risulta: $f(x) = \varphi(g(x)) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$. La derivata risulta: $f'(x) = \varphi'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Si ha: $g'(x) = 2x$, mentre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene: $\varphi'(g(x)) = e^{-(g(x))^2}$, quindi $f'(x) = 2x \cdot e^{-(g(x))^2} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$.

7 In generale risulta:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n + \dots + (n-1) \cdot n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \left(\sum_{k \neq b} bk \right) \Rightarrow \sum_{k \neq b} bk = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \right].$$

Valgono le seguenti relazioni, che si dimostrano facilmente per induzione:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Si ha infine: $\sum_{k \neq b} bk = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right] = \frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$. La risposta D è quella esatta.

8 Considerando che $(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2(x^2 + xy + y^2)$, allora $(x^3 - y^3)$ è divisibile per 2. Inoltre $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 3x^2 - 6x + 4$, che equivale a: $3(x^2 - 2x + 1) + 1$, che non è divisibile per 3. La risposta esatta è B.

9 Sono le possibili combinazioni di 3 oggetti scelti tra 88 (i 90 numeri dell'urna, tranne 1 e 90). Le possibili cinque sono quindi: $C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{3! \cdot 85!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 109736$.

10 Per la definizione di logaritmo: $2 = 3^{\log_3 2} = (2^{\log_2 3})^{\log_3 2} = 2^{\log_2 3 \cdot \log_3 2} \Rightarrow 1 = \log_2 3 \cdot \log_3 2$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 3 pag. V 282 • Problema 10 pag. π 139 (punti a, b) • Problema 22 pag. W 139
Problema 2	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 8 pag. U 247 • Problema 18 pag. W 153 (punti a, b)
Quesito 1	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 7 pag. π 96
Quesito 2	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 2 pag. π 96
Quesito 4	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 13 pag. U 43 (punto a) • Problema 20 pag. U 45 (punto a)
Quesito 5	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 1 pag. iota 62 • Quesito 6 pag. iota 62
Quesito 6	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 8 pag. W 136
Quesito 7	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 17 pag. α 41 • Problema 26 pag. α 43 (punti a, f)
Quesito 9	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 21 pag. α 42 (punto a)
Quesito 10	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 2 pag. N 95 • Quesito 7 pag. N 95